Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa finală, Piteşti

11 aprilie 2007

CLASA A XII-A, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Subiectul 1. a) Dacă $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii continue, demonstraţi inegalitatea Cauchy

$$\left(\int_0^1 u(x)v(x)dx\right)^2 \leq \left(\int_0^1 (u(x))^2\,dx\right)\left(\int_0^1 (v(x))^2\,dx\right).$$

b) Fie $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor funcţiilor derivabile $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, cu derivata f' continuă pe $[0,1]$ şi $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Determinaţi

$$\min_{f\in\mathcal{C}} \int_0^1 (1+x^2)^{1/2} \left(f'(x)\right)^2 dx$$

şi toate funcţiile $f \in \mathcal{C}$ pentru care este atins acest minimum.

Soluţie. a) În mod evident,

$$\int_0^1 (\lambda u(x) - v(x))^2\,dx \geq 0,$$

oricare ar fi numărul real λ. Efectuând calculele, rezultă

$$\lambda^2 \int_0^1 (u(x))^2\,dx - 2\lambda \int_0^1 u(x)v(x)dx + \int_0^1 (v(x))^2\,dx \geq 0,$$

oricare ar fi numărul real λ. Prin urmare, discriminantul acestui trinom de gradul doi este mai mic sau egal cu zero, de unde inegalitatea din enunţ (Cauchy-Schwarz). Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $v(x) = \lambda u(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

.... 1 punct

b) Aplicând inegalitatea Cauchy-Schwarz obţinem:

$$\begin{aligned}
1 =& f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(x)dx \\
=& \int_0^1 (1+x^2)^{-1/4} \left((1+x^2)^{1/4} f'(x)\right) dx \\
\le& \left(\int_0^1 (1+x^2)^{-1/2} dx\right)^{1/2} \left(\int_0^1 (1+x^2)^{1/2} \left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{1/2} \\
=& \left(\ln(1+\sqrt{2})\right)^{1/2} \left(\int_0^1 (1+x^2)^{1/2} \left(f'(x)\right)^2 dx\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

.... 2 puncte

Prin urmare,

$$\int_0^1 (1+x^2)^{1/2} \left(f'(x)\right)^2 dx \ge \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})},$$

pentru orice $f \in \mathcal{C}$.

.... 1 punct

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $f'(x) = k\left(1+x^2\right)^{-1/2}$, deci $f(x) = k \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + c$. Întrucât $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$, rezultă

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})} \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), \quad 0 \le x \le 1,$$

funcţie care aparţine mulţimii $\mathcal{C}$.

.... 3 puncte

Subiectul 2. Fie $f : [0,1] \to (0,\infty)$ o funcţie continuă pe $[0,1]$.

a) Arătaţi că pentru fiecare număr întreg $n \ge 1$ există o unică diviziune, $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$, a intervalului $[0,1]$, astfel încât

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx = \frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx, \quad k = 0, \cdots, n-1. \tag{$*$}$$

b) Pentru fiecare număr întreg $n \ge 1$, fie

$$\bar{a}_n = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

unde $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$ este diviziunea unică cu proprietatea $(*)$. Arătaţi că şirul $(\bar{a}_n)_{n\ge1}$ este convergent şi calculaţi limita sa.

Soluţie. a) Fie $F : [0, 1] \to [0, \infty)$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Condiţia $(*)$ devine

$$F(a_{k+1}) - F(a_k) = \frac{1}{n}F(1), \quad k = 0, \cdots, n-1,$$

. . . . 1 punct

sau, prin sumare,

$$F(a_k) = \frac{k}{n}F(1), \quad k = 0, \cdots, n. \tag{$**$}$$

. . . . 1 punct

Întrucât f ia valori strict pozitive, F este strict crescătoare, deci restricţia sa $F : [0, 1] \to [0, F(1)]$ este bijectivă. Prin urmare, sistemul $(**)$ are soluţia unică

$$a_k = F^{-1}\left(\frac{k}{n}F(1)\right), \quad k = 0, \cdots, n.$$

. . . . 2 puncte

b) Conform celor demonstrate la punctul a), pentru fiecare număr întreg $n \geq 1$ fixat,

$$a_k = F^{-1}\left(\frac{k}{n}F(1)\right), \quad k = 0, \cdots, n,$$

deci

$$\bar{a}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}F(1)\right) = \frac{1}{F(1)} \cdot \frac{F(1)}{n}\sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}F(1)\right).$$

. . . . 1 punct

Întrucât

$$\frac{F(1)}{n}\sum_{k=1}^{n} F^{-1}\left(\frac{k}{n}F(1)\right)$$

este o sumă Riemann a funcţiei $F^{-1} : [0, F(1)] \to [0, 1]$, ea este convergentă şi limita sa este

$$\int_0^{F(1)} F^{-1}(t)dt = \int_0^1 xf(x)dx.$$

. . . . 1 punct

Prin urmare, şirul $(\bar{a}_n)_{n\geq 1}$ converge la

$$\frac{\int_0^1 xf(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}.$$

.... 1 punct

Remarcă. Aşa cum era de aşteptat, limita şirului $(\bar{a}_n)_{n\geq 1}$ este abscisa centrului de greutate al domeniului plan mărginit de dreptele de ecuaţie $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ şi graficul funcţiei $y = f(x)$.

Subiectul 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi toate inelele $(A, +, \cdot)$ cu proprietatea: $x^{2^n+1} = 1$, oricare ar fi $x \in A \setminus \{0\}$.

Soluţie. Din enunţ rezultă că A este un corp de caracteristică 2.

.... 1 punct

Dacă $A = \{0, 1\}$, atunci $A = \mathbb{F}_2$, care îndeplineşte condiţia pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

.... 1 punct

Dacă nu, atunci pentru orice $x \in A \setminus \{0, 1\}$,

$$(x + 1)^{-1} = (x + 1)^{2^n} = x^{2^n} + 1 = x^{-1} + 1,$$

de unde, $1 = x^{-1}(x + 1) + x + 1$, deci $x^{-1} + x + 1 = 0$ şi prin urmare, $x^2 + x + 1 = 0$.

.... 2 puncte

În continuare, alegem $x \in A \setminus \{0, 1\}$ şi $y \in A \setminus \{0, 1, x\}$. Dacă $x + y \neq 1$, atunci $(x+y)^2+x+y+1 = 0$, de unde $xy+yx = 1$. Rezultă că $x^2y+xyx = x = xyx + yx^2$, deci $x^2y = yx^2$, de unde $(x + 1)y = y(x + 1)$, adică $xy = yx$ — fals. Prin urmare, $y = 1 + x$ şi $A = \{0, 1, x, 1 + x\}$, *i.e.* $A = \mathbb{F}_4$.

.... 2 puncte

Pentru ca acest corp să îndeplinească condiţia din enunţ, trebuie ca 3 să fie un divizor al lui $2^n + 1$, adică n să fie impar.

.... 1 punct

Subiectul 4. Fie S_n grupul permutărilor mulţimii $\{1, \cdots, n\}$, $n \geq 3$, şi G un subgrup al său generat de $n - 2$ transpoziţii. Arătaţi că pentru fiecare $i \in \{1, \cdots, n\}$ mulţimea $\{\sigma(i) : \sigma \in G\}$ are cel mult $n - 1$ elemente.

Soluţie. Prin inducţie după n. Pentru $n = 3$, $G = \{\epsilon, \tau\}$, unde ϵ este permutarea identică, iar τ este o transpoziţie; în mod evident, fiecare mulţime de forma $\{\sigma(i) : \sigma \in G\}$ are cel mult două elemente.

. . . . 1 punct

Fie $n > 3$. Presupunând afirmaţia adevărată pentru orice $m < n$, arătăm că ea este adevărată şi pentru n. Cele $n - 2$ transpoziţii care îl generează pe G alcătuiesc o mulţime T de cardinal $|T| = n-2$. Pentru fiecare $i \in \{1, \cdots, n\}$, notăm cu ν_i numărul de transpoziţii din T care *nu* îl fixează pe i. Dacă există un i astfel încât $\nu_i = 0$, atunci toate permutările din G îl fixează pe i, deci G este izomorf cu un subgrup al lui S_{n-1}, de unde concluzia din enunţ.

. . . . 1 punct

Dacă toţi $\nu_i \geq 1$, fie $\nu = \min\{\nu_i : i = 1, \cdots, n\}$ şi $j \in \{i : \nu_i = \nu\}$. Atunci

$$n\nu_j \leq \sum_{i=1}^{n} \nu_i = 2|T| = 2(n-2),$$

deci $\nu_j = 1$. Prin urmare, T conţine o singură transpoziţie care nu îl fixează pe j. Fie (j, k) această transpoziţie şi H subgrupul lui G generat de celelalte transpoziţii din T.

. . . . 2 puncte

Întrucât fiecare dintre acestea îl fixează pe j, rezultă că toate permutările din H îl fixează pe j, deci H este izomorf cu un subgrup al lui S_{n-1}, generat de $n-3$ transpoziţii. Conform ipotezei de inducţie, fiecare mulţime de forma $\{\sigma(i) : \sigma \in H\}$ are cel mult $n - 2$ elemente.

. . . . 1 punct

Întrucât o transpoziţie din $T \setminus \{(j, k)\}$ are cel mult un element în comun cu transpoziţia (j, k) — şi anume, k —, iar $G = \langle H, (j, k)\rangle$, rezultă că orice mulţime de forma $\{\sigma(i) : \sigma \in G\}$ are cel mult $(n - 2) + 1 = n - 1$ elemente.

. . . . 2 puncte

Remarci. (1) Formulată combinatoric, problema cere să se arate că un graf neorientat cu n vârfuri şi $n - 2$ muchii nu este conex.

(2) Dacă G este generat de transpoziţiile $(1, i)$, $i = 2, \cdots, n - 1$, adică G este imaginea standard a lui S_{n-1} în S_n, atunci orice mulţime de forma $\{\sigma(i) : \sigma \in G\}$ are exact $n - 1$ elemente — cardinalul maxim posibil.

(3) Mulţimile $\{\sigma(i) : \sigma \in G\}$ sunt orbitele acţiunii lui G pe $\{1, \cdots, n\}$. Rezultatul arată că lungimea acestor orbite este cel mult $n-1$. În particular, G nu poate acţiona tranzitiv pe $\{1, \cdots, n\}$: există $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ astfel încât $j \neq \sigma(i)$, oricare ar fi $\sigma \in G$ — i nu ajunge în j prin nici o permutare din G.